Exercice II.1 On suppose qu'on dispose de 3 bits pour représenter les entiers signés en base 2 en utilisant le complément à deux.

1. Donner les représentations de $2, -1$ et -2. Calculer la somme des trois représentations (expliquer en détail les calculs). Quel est le résultat ? De quel nombre est-ce la représentation ?
   Solution

   ---

   1 s'écrit en binaire 001, -1 s'écrit 110 en complément à 1 et 111 en complément à deux. 2 s'écrit en binaire 010, -2 s'écrit 101 en complément à 1 et 110 en complément à deux. La somme :

$$\begin{array}{cccc} (1) & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ + & 1 & 1 & 1 \\ + & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

   ---

2. Pourrait-on faire de même avec $2, 1, 3$ sans problème ?
   Solution

   Non il n'est pas possible de faire cela car la somme des 3 dépasse la représentation signé sur 3 bits (ou non signé sur 2 bits).

Exercice II.2 On considère des entiers (positifs ou négatifs) représentés sur 4 bits en complément à deux (rappel : le complément à deux est obtenu en ajoutant 1 au complément à un). On donne $r1 = 1010$ et $r2 = 0111$.

1. À quel entiers correspondent $r1$ et $r2$?
   Solution

   $r1 = 1010$ commence par 1 donc c'est un nombre négatif $1010 - 1 = 1001$ en complémentant on obtient : 0110 soit -6.
   $r2 = 0111$ Un nombre positif il est 7.

   ---

2. Calculer $r3 = r1 + r2$. À quel entier cela correspond-il ?
   Solution

$$\begin{array}{ccccc} (1) & 1 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

   Cela correspond à 1. L'addition est donc correcte.

   ---

3. De même avec $r1 = 1010$ et $r2 = 1100$
   Solution

$$\begin{array}{ccccccc} (1) & & & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & & -6 \\ + & 1 & 1 & 0 & 0 & & -4 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 0 & \neq & -10 \end{array}$$

   Cela correspond à 6. L'addition n'est pas correcte.

   ---

4. Comment pourrions-nous détecter un résultat erroné ?
   Solution

   Pour détecter qu'une addition donne le bon résultat il suffit de vérifier que l'addition de deux nombres positif donne un nombre positif et que l'addition de deux nombre négatif donne un nombre négatif. L'addition d'un nombre positif avec un nombre négatif ne peut pas dépasser les limites de la représentation car le résultat obtenu sera toujours plus proche de zéro que chaque nombre.

Exercice II.3 La représentation d'un nombre flottant sur 32 bits est telle que :

1. le bit de signe est 0,
2. l'exposant est 10001001,
3. la mantisse est 00010110000000000000000

Expliquer ce que cela signifie. Donner la valeur du nombre flottant en base 10 (ne pas oublier que l'exposant est biaisé à 127).
Solution

Le bit de signe est 0, c'est donc un nombre positif. Le l'exposant est de 137 soit $137 - 127 = 10$. La mantisse est de $1,0001011$ soit $10001011000,0$ ce qui donne 1112.

Exercice II.4 Les flottants sont représentés de manière normalisée sur 32 bits.

1. Calculer la représentation sur 32 bits du nombre réel 0,25. Même question pour $-6{,}25$ puis 0,1.
   Solution

   $0{,}25 = 2^{-2}$ donc la mantisse est nulle et l'exposant est $-2 + 127 = 125 = 01111101$ Cela donne

   $$0\ 01111101\ 00000000000000000000000 : 0x3E800000$$

   $-6,25$ est un nombre négatif donc on mettra le premier bit à 1 et on calcul la représentation $6{,}25 = 110,01 = 1,1001 \times 2^2$ La mantisse est de 1001 et l'exposant est $2 + 127 = 129 = 10000001$ On obtient :

   $$1\ 10000001\ 10010000000000000000000 : 0xC0C80000$$

   Enfin $0,1$ calculons sa mantisse $0,1 < 1 : 0$
   $0,5 < 1 : 0,0$
   $0,25 < 1 : 0,00$
   $0,1 < 0,125 : 0,000$
   $0,1 > 0,0625 : 0,0001$
   et il reste $0,0375 > 0,03125 : 0,00011$
   il reste $0,00625$
   On tourne en rond, du coup on obtient : $0,00011001100110011001100 1101$ Ce qui donne un exposant de $-4 + 127 = 123 = 01111011$ Ce qui donne le nombre suivant :

   $$0\ 01111011\ 10011001100110011001101 : 0x3DCCCCCD$$

   ---

2. Quel est le plus petit réel positif non nul représentable ? le plus grand ?
   Solution

Le plus petit réel positif non nul représentable est celui avec une mantisse plein de 0 et finissant par 1 et un exposant de 0. Ce qui fait $0x00000001$ lorsque l'exposant est 0 alors le 1 au début de la mantisse disparait. Du coup ce nombre est égale à $2^{-127-22} = 2^{-149}$.

Le plus grand nombre est la mantisse à 1 et l'exposant aussi. Sauf qu'il faut mettre 0 au signe et enlevez 1 à l'exposant car sinon ça correspond à un Nan (cf la norme). Ce qui fait environ $3,402 \times 10^{38}$
